1. Si $|g'(\alpha)| < 1$ entonces la función iterativa converge.

2. Si $|g'(\alpha)| << 1$, entonces la rapidez de la convergencia es mayor. (Es decir, mientras menor sea el valor de $|g'(\alpha)|$, mayor será la rapidez de la convergencia.)

3. Si $g'(\alpha)$ es positiva, tenemos una convergencia (o divergencia) monótona.

4. Si $g'(\alpha)$ es negativa, tenemos una convergencia (o divergencia) oscilante.

Todo esto está muy bien, excepto por una cosa. ¡¡No conocemos el valor real de α!! Por lo tanto, no nos es posible hallar $g'(\alpha)$. Sin embargo, podemos usar el valor de x_n que obtenemos a través de la función iterativa. Puesto que este valor va a estar cerca de α, entonces tenemos que $g'(\alpha) \approx g'(x_n)$ para $x_n \approx \alpha$.

EJERCICIO 25.1

1. Anote los seis primeros términos de las siguientes funciones iterativas:

(a) $x_{n+1} = x_n^2 + 1, x_1 = 1$ (b) $x_{n+1} = 2x_n + 4, x_1 = 2$

(c) $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 4, x_1 = 3$ (d) $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}, x_1 = 1$

2. Para la función iterativa $x_{n+1} = x_n^2 - 1$, halle los primeros 5 términos usando

(a) $x_1 = 2$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 0$ (d) $x_1 = -1$.

3. Halle el límite (con una exactitud de 2 decimales) para cada una de las siguientes funciones iterativas:

(a) $x_{n+1} = \frac{x_n}{10} + 9$ si (i) $x_1 = 20$ (ii) $x_1 = 10$ (iii) $x_1 = 1$

(b) $x_{n+1} = \frac{x_n}{5} + 1$ si (i) $x_1 = 20$ (ii) $x_1 = 10$ (iii) $x_1 = 5$

4. Para cada una de las siguientes funciones iterativas,

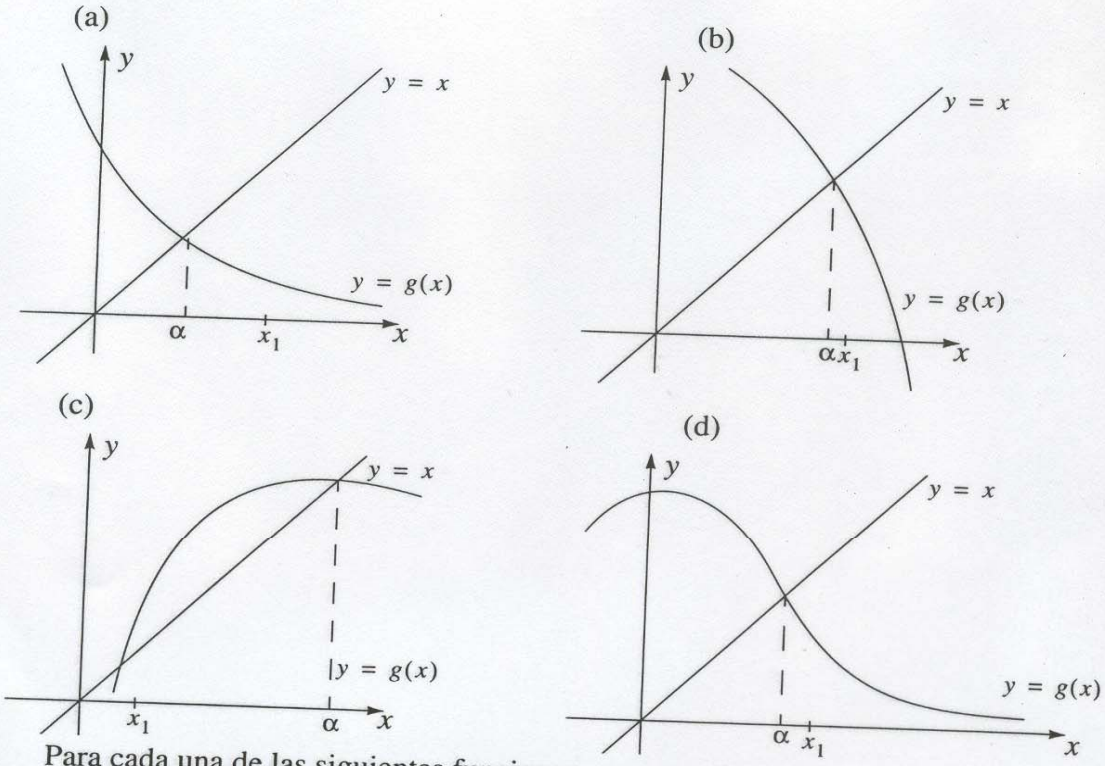
(i) halle el límite (si existe).
(ii) plantee la ecuación que corresponde a la función iterativa, y use la función iterativa para hallar sus raíces.

(a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2, x_1 = 1$. (b) $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 3, x_1 = 2$.

(c) $x_{n+1} = \frac{5}{x_n - 4}$. (d) $x_{n+1} = \frac{7}{x_n - 6}$.

(Nota: hay 2 soluciones para (c) y (d).)

5. Haga un diagrama en telaraña para cada uno de los siguientes diagramas, y decida si la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n), x_1 = a$ converge hacia un punto fijo $x = \alpha$ o diverge.



6. Para cada una de las siguientes funciones,

(i) halle el límite (con dos cifras decimales).

(ii) haga un diagrama en telaraña para verificar que existe una solución.

(iii) halle la fórmula original que produjo la función iterativa.

(a) $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}, x_1 = 1$

(b) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n}, x_1 = 1$

(c) $x_{n+1} = 2(3 + 2^{x_n}), x_1 = 1$

(d) $x_{n+1} = 20\dfrac{\log_{10} x_n}{x_n}, x_1 = 2$

(e) $x_{n+1} = 0.2x^2 + 0.4, x_1 = 4$

(f) $x_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{x_n}, x_1 = 2$

7. Utilizando el método de iteración, halle (con dos decimales) las soluciones de

(a) $x = \cos x + 1$

(b) $x = \sqrt{4 + \dfrac{3}{x}}$

(c) $x = \dfrac{x+1}{x^3}$

8. Sin realmente llegar a obtener las soluciones (si existen), ¿cuáles de los siguientes reordenamientos darían un límite si se usara la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$?

¿Cuántas de las soluciones se pueden obtener empleando los reordenamientos dados?

[Sugerencia: Haga un gráfico de $y = x$ e $y = g(x)$, donde $y = g(x)$ está dada en el lado derecho de la ecuación reordenada, para cada uno de los reordenamientos, y use un diagrama en telaraña].

(a) $x^3 - 3x - 1 = 0$, usando

(i) $x = \sqrt[3]{3x+1}$ (ii) $x = \frac{1}{3}(1+x^3)$

(iii) $x = \frac{3x+1}{x^2}$ (iv) $x = \sqrt{\frac{3x+1}{x}}$

(b) $x^2 + x - 7 = 0$, usando

(i) $x = \pm\sqrt{7-x}$ (ii) $x = \frac{7-x}{x}$

(iii) $x = 7 - x^2$ (iv) $x = \frac{7}{x+1}$

(c) $x^2 e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$

(i) $x = \frac{1}{2x}e^x$ (ii) $x = -\log_e\left(\frac{1}{2x^2}\right)$

(iii) $x = \sqrt{\frac{1}{2}}e^x$ (iv) $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}e^x$

9. (a) Demuestre que la ecuación $x^4 - x = 1$ se puede escribir en la forma $x = g(x)$, donde (i) $g(x) = 1 - x^4$ (ii) $g(x) = \sqrt[4]{1+x}$

(b) Use el valor de $g'(x)$ cerca de las raíces en que $x = g(x)$ para determinar si la secuencia generada por la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$ converge o diverge.

(c) Resuelva la ecuación $x^4 - x = 1$ usando la expresión dada para $g(x)$ (si es que se puede hallar una solución).

10. (a) Demuestre que la ecuación $e^x - 4x = 1$ se puede escribir en la forma $x = g(x)$, donde (i) $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - 1)$ (ii) $g(x) = \log_e(4x+1)$

(b) Use el valor de $g'(x)$ cerca de las raíces en que $x = g(x)$ para determinar si la secuencia generada por la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$ converge o diverge.

(c) Resuelva la ecuación $e^x - 4x = 1$ usando la expresión dada para $g(x)$ (si es que se puede hallar una solución).

11. (a) Demuestre que la ecuación 4 sen $x + x = 4$ se puede escribir en la forma $x = g(x)$,

donde (i) $g(x) = 4 - 4\operatorname{sen} x$ (ii) $g(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{4-x}{4}\right)$

(b) Use el valor de $g'(x)$ cerca de las raíces en que $x = g(x)$ para determinar si la secuencia generada por la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$ converge o diverge.

Nota: Si $y = \operatorname{arcsen} f(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$.

(c) Resuelva la ecuación 4 sen $x + x = 4$ usando la expresión dada para $g(x)$ (si es que se puede hallar una solución).

12. (a) Demuestre que la ecuación $e^x - \log_e x = 1$ se puede escribir en la forma $x = g(x)$

donde (i) $g(x) = \log_e(1 + \log_e x)$ (ii) $g(x) = e^{[e^x - 1]}$

(b) Use el valor de $g'(x)$ cerca de las raíces en que $x = g(x)$ para determinar si la secuencia generada por la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$ converge o diverge.

(c) Resuelva la ecuación $e^x - \log_e x = 1$ usando la expresión dada para $g(x)$ (si es que se puede hallar una solución).

13. Resuelva las siguientes ecuaciones usando la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$, reordenando apropiadamente la ecuación dada (si fuera necesario).

(a) $x(x+1)^2 = 1$

(b) $x + \tan x = 4$

(c) $\dfrac{x}{\cos x} = 1$

(d) $x = (x+1)^3$

(e) $x + \log_e x = 2$

(f) $\dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x} = 1$

(g) $10xe^x - 1 = 0$

(h) $x^3 - 5x + 1 = 0$

14. (a) (i) Dibuje la curva $y = x^3 - 6x + 2$.

(ii) ¿Cuántas soluciones existen para la ecuación $x^3 - 6x + 2 = 0$?

(b) Reescriba la ecuación $x^3 - 6x + 2 = 0$ en la forma $x = g(x)$ y

(i) haga el diagrama en telaraña que se generaría al usar la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$

(ii) use el método de aproximaciones sucesivas generadas por la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$ para determinar una aproximación a la mayor raíz positiva, dando su respuesta con 2 cifras decimales.

(c) ¿Le permitirá la ecuación $x = g(x)$ de la parte (b) determinar la segunda raíz positiva?

15. La raíz cuadrada de un número positivo N, es decir, $\sqrt{N}$, se puede obtener tomando la solución positiva de la ecuación $x^2 = N$.

(a) Demuestre que se puede hallar una aproximación a $\sqrt{N}$ haciendo uso de la función iterativa $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{N}{x_n}\right)$.

(b) Use el resultado de la parte (a) para hallar una aproximación a $\sqrt{12}$.

1. Selección de la primera aproximación $x = x_1$

Las siguientes serían malas elecciones:

i. Si $f(x)$ es indefinida.
ii. Si x_1 está lejos de donde $f(x) = 0$.
iii. Si hay una asíntota en $x = x_1$.
iv. Si $f'(x)$ es indefinida.

2. Convergencia a una solución

En la mayoría de los casos, el método de Newton dará un valor que converge a una solución de $f(x) = 0$ (si x_1 se elige apropiadamente) Las aproximaciones sucesivas no siempre van a converger en una raíz. La mayoría de las razones por las cuales las aproximaciones sucesivas no convergen en una raíz están basadas en el comportamiento de la función cerca de la raíz. En seguida se indican algunas de estas razones:

i. No hay raíces en el intervalo $[a, b]$ seleccionado.
ii. Una de las raíces sucesivas corresponde a un punto estacionario.
iii. Raíces sucesivas dan raíces repetidas (esto sucedería si existe simetría central alrededor de la raíz).

Esta lista no es de ninguna manera exhaustiva, pero apunta a la importancia de tener una idea razonable de las propiedades y el comportamiento de la curva $y = (x)$ cerca de la raíz.

EJERCICIO 25.3

1. Use el método de Newton para determinar, con 2 cifras decimales, las raíces de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 - x - 4 = 0$ para $x \in [2, 3]$ (b) $x^2 + 2x - 5 = 0$ para $x \in [1, 2]$

(c) $x^3 + x - 3 = 0$ para $x \in [1, 2]$ (d) $x^3 + x^2 - 3 = 0$ para $x \in [1, 2]$

(e) $\operatorname{sen} x = 1 - x$ para $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ (f) $\cos x = x^3$ para $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

2. Demuestre que, si $x = a$ es una buena aproximación a $x^2 = m$, entonces $\frac{1}{2}\left(a + \frac{m}{a}\right)$ es mejor.

3. Use el método de Newton para determinar, con 2 cifras decimales, las raíces de las siguientes ecuaciones:

(a) $\tan x = 1 - x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\log_e(x + 1) = x^2 - 1$

4. Explique por qué no se puede usar el método de Newton para hallar una raíz aproximada de la ecuación $x^3 + 1 = \frac{3}{2}x^2$ al usar una primera aproximación de $x_1 = 1$.

Aproximaciones

5. Demuestre que la raíz cuadrada de un número positivo 'a' se puede obtener usando la fórmula $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.

6. Demuestre que la ecuación $x^3 + 1 = 2x^2$ tiene una solución negativa. Use el método de Newton para determinar esa raíz con 3 cifras decimales.

7. Use una calculadora gráfica para responder la Pregunta 1.

PRUEBA DE AUTOEVALUACIÓN (45 MINUTOS)

1. (a) (i) Dibuje la curva $y = x^3 - x$

(ii) En seguida dibuje la curva $y = x^3 - x - 0.1$.

(iii) ¿Cuántas soluciones habrá para la ecuación $x^3 - x - 0.1 = 0$?

(b) Reescriba la ecuación $x^3 - x - 0.1 = 0$ en la forma $x = g(x)$ y

(i) haga el diagrama en telaraña que se generaría al usar la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$

(ii) use el método de aproximaciones sucesivas generado por la función iterativa $x_{n+1} = g(x_n)$ para determinar una aproximación a la mayor raíz negativa, dando su respuesta con 2 cifras decimales.

(c) ¿Le permitirá la ecuación $x = g(x)$ de la parte (b) determinar la raíz positiva?

[13 puntos]

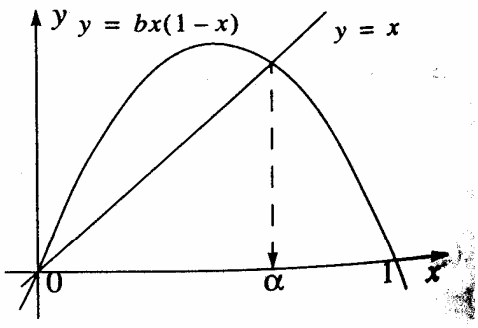
2. (a) Dibuje el gráfico de $x \mapsto x + e^x$ para $-2 \le x \le 2$.

(b) Use el método de Newton-Raphson para hallar la solución de $x + e^x = 0$, dando su respuesta con 3 cifras decimales.

[5 puntos]

3. (a) (i) Haga un gráfico exacto de $y = 4x(1-x)$, $0 \le x \le 1$.

(ii) Dibuje un diagrama en telaraña que muestre las primeras 15 iteraciones que generaría la función iterativa $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ si $0 < x_1 < 1$.



(b) Halle la relación entre α y b si se debe asegurar que la función iterativa $x_{n+1} = bx_n(1-x_n)$, $b > 0$, generará una secuencia convergente de manera que $\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \alpha$.

[6 puntos]